Teorema de Gauss

INFO ACTIVA dos

Si el polinomio P(x), de grado *n*, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces ***p*** es divisor del término independiente y ***q*** lo es del coeficiente principal.

- Para hallar las raíces racionales de $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + d$:

1. se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal;
2. se buscan las posibles raíces: $\frac{p}{q}$ $\begin{matrix} p \to \textit{Divisores del término independiente.} \\ q \to \textit{Divisores del coeficiente principal.}\end{matrix}$

Todo polinomio P(x), de grado *n*, de *n* raíces reales, puede factorizarse como:

$$P(x) = a\,.\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)\,.\,(x - x_3)\,.\dots.\,(x - x_n)$$

Siendo *a* el coeficiente principal de P(x) y x_1; x_2; ... ; x_n raíces reales de P(x).

Hallen las raíces del polinomio $P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$.

Término independiente: 4

Divisores del término independiente: ±1; ±2; ±4.

Coeficiente principal: 4

Divisores del coeficiente principal: ±1; ±2; ±4.

Posibles raíces $\frac{p}{q}$: $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}$

Se especializa el polinomio P(x) por las posibles raíces [x_1 es raíz si $P(x_1) = 0$].

$P(-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ es raíz. $P(2) = 0 \Rightarrow x_2 = 2$ es raíz. $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}$ es raíz.

$$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4 \Rightarrow P(x) = 4\,.\,(x + 1)\,.\,(x - 2)\,.\,\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

- Un polinomio P(x) tiene una **raíz múltiple** si al descomponerlo en función de sus raíces hay factores iguales; el orden de multiplicidad de la misma está dado por el exponente del factor.

Polinomio factorizado	Raíces	Multiplicidad
$P(x) = -7\,.\,(x + 2)\,.\,(x - 5)\,.\,(x - 4)$	$x_1 = -2 \wedge x_1 = 5 \wedge x_1 = 4$	Tres raíces simples.
$P(x) = (x - 6)^2 = (x - 6)\,.\,(x - 6)$	$x_1 = x_2 = 6$	Una raíz doble.
$P(x) = (x + 5)^3 = (x + 5)\,.\,(x + 5)\,.\,(x + 5)$	$x_1 = x_2 = x_3 = -5$	Una raíz triple.
$P(x) = \left(x - \frac{3}{5}\right)^2\,.\,(x + 9)^3$	$x_1 = x_2 = \frac{3}{5} \wedge x_3 = x_4 = x_5 = -9$	$\frac{3}{5}$, raíz doble y −9, raíz triple.
$P(x) = x^4\,.\,(x + 10) = x\,.\,x\,.\,x\,.\,x\,.\,(x + 10)$	$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \wedge x_5 = -10$	0, raíz cuádruple y −10, raíz simple.