ACTIVIDADES POR SUSPENSIÓN DE CLASES PRESENCIALES

Espacio curricular: Matemática

Curso: 6to año A

Docente: Viviana Corradini

e-mail: vcorradini@institutonsvallecba.edu.ar

PARTE II: Actividades a desarrollar durante la semana del 06/04 al 08/04

Temas: 1. *Método general de descomposición factorial.*

2. *Orden de multiplicidad de las raíces en un polinomio.*

Objetivos: - Recuperar conceptos previos desarrollados en años anteriores.
- Fomentar la capacidad de autonomía en el estudio
- Aplicar lo aprendido a otros ejemplos.

El plazo para enviar estas actividades es el **lunes 13-04**.

Evaluación: Estas actividades serán calificadas en porcentaje y formará parte de la nota de proceso del primer trimestre.

Los criterios a tener en cuenta para evaluar son:

* Presentación en tiempo y forma.

* El planteo y la justificación de los pasos realizados para resolver.

* La pertinencia temática.

Para todas las actividades tengan en cuenta:

- Resolverlas individualmente, en forma manuscrita, y luego enviarlas escaneadas o por foto a la dirección de correo indicada en este archivo, para ser corregidas.
- Procurar nitidez y legibilidad en las respuestas enviadas.
- Identificar los archivos enviados con su nombre y apellido.

MÉTODO GENERAL DE DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

La metodología de esta propuesta de trabajo consiste, al igual que la anterior, en que vayan completando la guía y transcriban a sus carpetas sólo algunos ejemplos y los ejercicios que tienen que resolver, con su correspondiente resolución. Para facilitarles su identificación estarán escritos en color azul.

Comencemos:

Un polinomio puede factorearse conociendo sus raíces. Para ello debemos saber que, si un número real **a** es raíz de un polinomio, éste es divisible por el binomio formado por la diferencia entre la variable **x** y la raíz **a**, es decir (**x – a).** Cabe aclarar que si la raíz es negativa el binomio se transforma en una suma.

Por lo tanto, si un polinomio tiene un cierto número de raíces, se puede factorear como el producto de su coeficiente principal por tantos binomios de la forma (x – a) como raíces tenga el polinomio.

Es decir, si un polinomio P(x) de coeficiente principal **m** tiene, por ejemplo, tres raíces $\mathbf{a_1}$; $\mathbf{a_2}$ y $\mathbf{a_3}$ se puede factorear así:

$$\mathbf{P(x) = m.(x - a_1).(x - a_2).(x - a_3)}$$

Veamos el ejemplo que desarrollamos cuando repasamos el teorema de Gauss:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$$

Como vimos, sus raíces son: -1 ; $-\frac{1}{2}$ y 3

Entonces, el polinomio queda factoreado así:

$$2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 2.(x+1).\left(x+\frac{1}{2}\right).(x-3)$$

Veamos ahora otro ejemplo:

$Q(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$ (I)

1. Buscamos las posibles raíces con el Teorema de Gauss

   Divisores de p: 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4

   Divisores de q: 1 ; -1 ; 3 ; -3

   Posibles raíces $\frac{p}{q}$: 1 ; -1 ; 2 , -2 ; 4 ; -4 ; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}$

2. Calculamos hasta encontrar una raíz (sólo una)

   Por ejemplo: $Q(2) = 3\,.\,2^3 + 2^2 - 12\,.\,2 - 4 = 0$ por lo tanto 2 es raíz de Q(x)

3. Al encontrar una raíz, podemos escribir un divisor:
   Si x = 2 es raíz entonces (x – 2) es divisor de Q (II)

4. Dividimos el polinomio dado (I) por este divisor (II)
   $(3x^3 + x^2 - 12x - 4) : (x - 2)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & -12 & -4 \\ 2 & & 6 & 14 & 4 \\ \hline & 3 & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

Cociente: $3\,x^2 + 7x + 2$

5. Como el polinomio cociente es de grado mayor a uno, seguimos buscando raíces. Dado que el polinomio es de segundo grado podemos buscar raíces utilizando nuevamente el teorema de Gauss o aplicando la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.3.2}}{2.3} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = -2$$

6. Una vez que hallamos las raíces, factoreamos el polinomio:

   Las raíces son: 2 ; $-\frac{1}{3}$: -2, entonces el polinomio queda factoreado así:

$$\boxed{3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 3.(x - 2).\left(x + \frac{1}{3}\right).(x + 2)}$$

Veamos otro ejemplo:

$M(x) = -4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 3x + 2$ (I)

Divisores de p: 1 ; -1 ; 2 ; -2

Divisores de q: 1 ; -1 ; 2 : -2 ; 4 ; -4

Posibles raíces: 1 ; -1 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 2 ; -2

Hallamos una raíz, por ejemplo:

$M(1) = -4.1^4 + 12.1^3 - 7.1^2 - 3.1 + 2 = 0$, por lo tanto 1 es raíz.

Luego, si 1 es raíz, entonces (x – 1) es divisor de M.   (II)

Dividimos (I) por (II)

$$(-4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 3x + 2) : (x - 1)$$

	-4	12	-7	-3	2
1		-4	8	1	-2
	-4	8	1	-2	0

Cociente: $-4x^3 + 8x^2 + x - 2$

Como el polinomio es de tercer grado, para seguir factoreando podemos aplicar nuevamente el teorema de Gauss, buscando otra raíz, con las mismas posibles raíces que hallamos a comienzo:

$M\left(-\frac{1}{2}\right) = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$, por lo tanto $-\frac{1}{2}$ es raíz.

Si $-\frac{1}{2}$ es raíz entonces $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ es divisor del polinomio

Dividimos $(-4x^3 + 8x^2 + x - 2) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

	-4	8	1	-2
$-\frac{1}{2}$		2	-5	2
	-4	10	-4	0

Cociente: $-4x^2 + 10x - 4$

Para hallar otra raíz, aplicamos la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado:

$$x_{1;2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4.(-4).(-4)}}{2.(-4)} = \frac{-10 \pm 6}{-8} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto las raíces son: $1; -\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}$

Factoreamos:

$$\boxed{-4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 3x - 2 = -4.(x - 1).\left(x + \frac{1}{2}\right).(x - 2).\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

Este método no se limita a polinomios de coeficientes enteros, también se aplica en polinomios con coeficientes racionales:

Por ejemplo:

$$P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x + 3$$

Primero debemos transformar los coeficientes racionales en enteros, multiplicando por un número conveniente.

En este ejemplo, si multiplicamos por dos nos queda:

$$2.\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x + 3\right) = x^3 - 7x + 6$$

Ahora sí lo podemos factorear aplicando el método que vimos:

Divisores de p: ………………….

Divisores de q: ………………….

Posibles raíces; ………………….

Encuentro una raíz: ……………………

Si …. es raíz entonces (……..) es divisor de P.

Dividimos: $(x^3 - 7x + 6) : (\dots\dots\dots)$

(¡No te olvides de completar el polinomio dividendo!)

Cociente:

Buscamos otra raíz: como el polinomio cociente es de segundo grado usamos la fórmula resolvente:

$$x_1 = \dots\dots$$

$$x_{1;2} = \frac{\dots\pm\sqrt{\dots\dots\dots\dots\dots}}{2\dots\dots}$$

$$x_2 = \dots\dots$$

Las raíces son: ….. ; ……. y ……..

Factoreamos:

$$\boxed{\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x + 3 = \frac{1}{2}(x-1).(x+2).(x-3)}$$

Si llegaste a este resultado, realizaste correctamente todos los pasos.

ORDEN DE MULTIPLICIDAD DE UNA RAÍZ EN UN POLINOMIO

Éste es otro concepto importante sobre raíces de un polinomio.

> El orden de multiplicidad de una raíz en un polinomio es la cantidad de veces que aparece el factor asociado a esa raíz en su expresión factorizada

Por ejemplo: $P(x) = 2x^3 - 6x + 4$

Divisores de p: 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4

Divisores de q: 1 ; -1 ; 2 ; -2

Posibles raíces: 1 ; -1 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 2 ; -2 ; 4 ; -4

Buscamos una raíz: $P(1) = 2.1^3 - 6.1 + 4 = 0$, por lo tanto 1 es raíz.

Si 1 es raíz entonces (x – 1) es divisor de P.

Dividimos: $(2x^3 - 6x + 4):(x - 1)$

	2	0	-6	4
1		2	2	-4
	2	2	-4	0

Cociente: $2x^2 + 2x - 4$

Buscamos las otras raíces:

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.2.(-4)}}{2.2} = \frac{-2 \pm 6}{4} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Las raíces son: 1 ; 1 ; -2

Como puedes observar 1 es dos veces raíz.

Factoreamos: $2x^3 - 6x + 4 = 2.(x - 1).(x - 1).(x - 2) = 2.(x - 1)^2.(x - 2)$

Orden de multiplicidad: la raíz $x_1 = 1$ es de orden 2 o raíz doble

la raíz $x_2 = -2$ es de orden 1 o raíz simple

Actividades:

1) Completa el cuadro:

Polinomio factorizado	Raíces	Multiplicidad
$P(x) = 2.(x-2).(x-3)^3$	$x_1 = 2$ $x_2 = 3$	Raíz simple Raíz triple
$Q(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 .(x+1)^3$	$x_1 = \ldots$ $x_2 = \ldots$	………………. …………….
$M(x) = x^3.(x-4).(x-2)^2$	$x_1 = \ldots$ $x_2 = \ldots$ $x_3 = \ldots$	……………. …………… …………….

2) Calcula las raíces de los siguientes polinomios, factorízalo e indica el orden de multiplicidad de sus raíces:

$A(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$ $\quad$ $B(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 - 32x - 16$

$C(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$